Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 05.09.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija I**

Zadatak br. 1

(20%) a) Isključivo aksiomama incidencije i poretka dokazati da dvije različite prave mogu imati najviše jednu zajedničku tačku.

(30%) b) Posmatrajmo skup od pet različitih tački A, B, C, D i E (date tačke nacrtati proizvoljno), i posmatrajmo sve moguće duži dobijene od nacrtanih tački (AB, AC, AD, AE, BC, ..., DE). Obrazložiti da li nacrtana geometrija tj. nacrtane duži zadovoljavaju aksiome incidencije I_1, I_2 i I_3 (naravno u datim aksiomama pojam prava zamjeniti sa pojmom duž). Isto tako obrazložiti da li nacrtana geometrija zadovoljava aksiomu paralelnosti (P),
(P): Za svaku tačku M, i za svaku pravu m, postoji najviše jedna prava koja sadrži tačku M i paralelna je sa pravom m.

(50%) c) Data je realna Dekartova ravan (skup tački $\mathbb{R}^2$ uređenih parova realnih brojeva). Prava u Dekartovoj ravni je podskup tački $P(x, y)$ koje zadovoljavaju linearnu jednačinu $ax + by + c = 0$ gdje su x i y promjenjive. Obrazložiti da li data geometrija zadovoljava aksiome incidencije I_1, I_2 i I_3.

Zadatak br. 2

(30%) a) Dokazati da kompozicija tri osne simetrije ne može biti identitet.

(70%) b) Dokazati da je proizvod tri osne simetrije osna simetrija ako i samo ako sve tri ose pripadaju eliptičnom pramenu pravih.

(Napomena: Eliptičan pramen pravih je skup pravih koje prolaze kroz istu tačku.)

Zadatak br. 3

(20%) a) U oštrouglom trouglu $\triangle ABC$ ($AC < BC$) visina $h_c = CC'$ i simetrala $s = p(C, M)$ ugla γ zaklapaju ugao od $9°$, a simetrale spoljašnjih uglova kod tjemena A i B sijeku se pod uglom od $61°$. Odrediti uglove $\triangle ABC$.

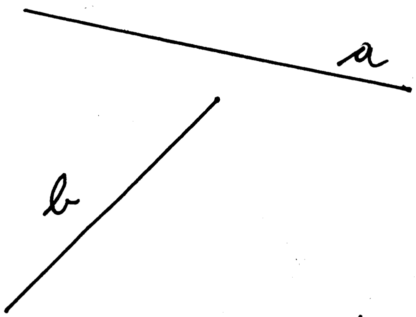
(20%) b) Data je prava a. Konstruisati pravu p koja prolazi kroz datu tačku M koja ne pripada pravoj a, i koja siječe datu pravu a pod uglom od $20°$. (Ugao od $20°$ konstruisti približno tačno.)

(60%) c) Krug k upisan u tupougli trougao $\triangle ABC$ (ugao kod vrha $\measuredangle ABC$ je tup) ima centar u tački I i dodiruje stranice AC i AB redom u tačkama P i Q. Prava $p(C, I)$ siječe duž PQ u tački N. Dokazati da se oko četverougla $\square BINQ$ može opisati krug.

Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Isključivo aksiomama incidencije i poretka dokazati da dvije različite prave mogu imati najviše jednu zajedničku tačku.

Rj: Neka su date dvije različite prave a i b.



Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da dvije date prave imaju dvije zajedničke tačke A i B, gdje je $A \neq B$.

Prema aksiomama I_1 i I_2 postoji tačno jedna prava koja je incidentna i sa tačkom A i sa tačkom B $\Rightarrow$ $a \equiv b$

#kontradikcija
(a i b su dvije različite prave)

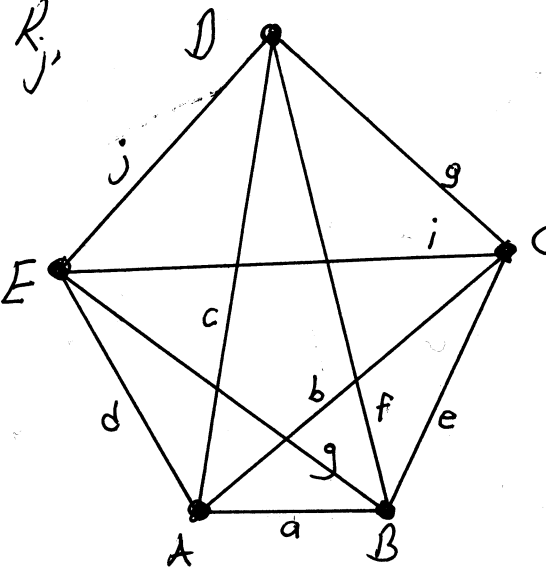
Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna, Prema tome

dvije različite prave mogu imati najviše jednu zajedničku tačku

q.e.d.

Posmatrajmo skup od pet različitih tački A, B, C, D i E (date tačke nacrtati proizvoljno), i posmatrajmo sve moguće duži AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE i DE. Obrazložiti da li nacrtana geometrija tj. nacrtane duži zadovoljavaju aksiome incidencije I_1, I_2 i I_3 (naravno u datim aksiomama pojam prava zamijeniti sa pojmom duž). Isto tako obrazložiti da li nacrtana geometrija zadovoljava aksiomu paralelnosti (P), (P): Za svaku tačku M, i za svaku pravu m, postoji najviše jedna prava koja sadrži tačku M i paralelna je sa pravom m.

Rj.



I_1 Za svake dvije tačke postoji prava koja je incidentna sa svakom od tih tački.

Za skup {A,B,C,D,E} postoji 10 različitih podskupova sa dva različita elementa {A,B}, {A,C}, {A,D}, ..., {D,E}. U našem slučaju postoji 10 duži (vidi sliku) pa je I_1 zadovoljeno.

I_2 Za svake dvije tačke postoji najviše jedna prava koja je incidentna sa svakom od tih tački.

Primjetimo da na nacrtanoj slici ne postoje dvije tačke kroz koje smo uspjeli provući dvije duži.

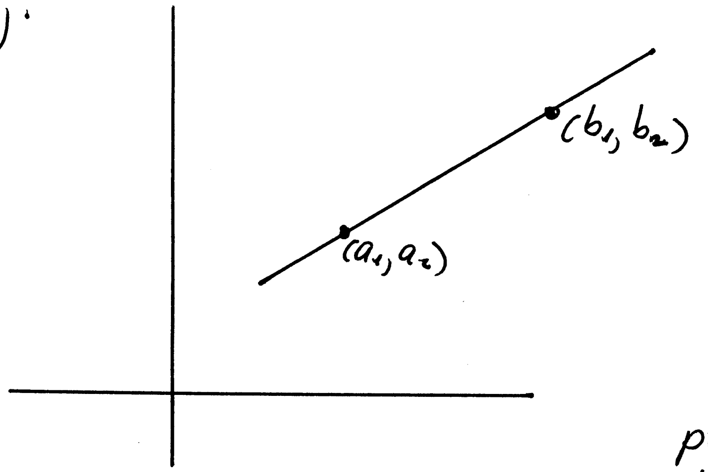
I_3 Za svaku pravu postoje bar dvije tačke koje su sa njom incidentne. Postoje bar tri tačke koje nisu incidentne sa istom pravom.

U nacrtanom slučaju postoji deset duži a, b, c, d, e, f, g, i, j. Za svaku od ovih duži postoje dvije tačke koje su sa njom incidentne. Za svako od ovih duži postoji tačka koja nije sa njom incidentna.

(P) Aksioma paralelnosti nije zadovoljena: Za tačku C, i za duž AE postoje dvije duži (DC, BC) koje sadrže tačku C i koje nemaju zajedničkih tački sa duži AE, tj. DC i BC su paralelne sa AE.

\# Data je realna Dekartova ravan (skup tački $\mathbb{R}^2$ uređenih parova realnih brojeva). Prava u Dekartovoj ravni je podskup tački $P(x,y)$ koje zadovoljavaju linearnu jednačinu $ax+by+c=0$ gdje su x i y promjenjive. Obrazložiti da li data geometrija zadovoljava aksiome incidencije I_1, I_2, i I_3.

Rj.



I_1 Za svake dvije tačke postoji prava koja je incidentna sa svakom od tih tački.

Izaberimo dvije proizvoljne tačke (a_1,a_2) i (b_1,b_2). Da li postoji prava koja prolazi kroz ove dvije tačke?

Da ove dvije tačke pripadaju pravoj $y-a_2=\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}(x-a_1)$ (provjeriti za vježbu) ako je $a_1 \neq b_1$. Ako je $a_1=b_1$ one leže na pravoj $x=a$

I_2 Za svake dvije tačke postoji najviše jedna prava koja je incidentna sa svakom od tih tački.

Pretpostavimo suprotno tj. pretpostavimo da postoje dvije različite tačke (x_1,y_1) i (x_2,y_2) za koje postoje dvije prave $a_1: a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ koje su incidentne sa datim tačkama.

Tada:
$$\begin{array}{r} a_1x_1+b_1y_1+c_1=0 \\ -\ a_1x_2+b_1y_2+c_1=0 \\ \hline a_1(x_1-x_2)+b_1(y_1-y_2)=0 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{r} a_2x_1+b_2y_1+c_2=0 \\ -\ a_2x_2+b_2y_2+c_2=0 \\ \hline a_2(x_1-x_2)+b_2(y_1-y_2)=0 \end{array}$$

$$\frac{a_1}{b_1}=-\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \quad \dots(1) \qquad \frac{a_2}{b_2}=-\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \quad \dots(2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow a_1=ka_2$ i $a_2=kb_2$ za neko $k\in\mathbb{R}$.

Ovo nam ništa ne govori. Pokušajmo posmatrati drugačije sisteme:

$$\begin{array}{l} a_1x_1+b_1y_1-c_1=0 \\ - \quad a_2x_1+b_2y_1-c_2=0 \\ \hline (a_1-a_2)x_1+(b_1-b_2)y_1=0 \end{array} \quad \ldots(3)$$

$$\begin{array}{l} a_1x_2+b_1y_2-c_1=0 \\ - \quad a_2x_2+b_2y_2-c_2=0 \\ \hline (a_1-a_2)x_2+(b_1-b_2)y_2=0 \end{array} \quad \ldots(4)$$

Iz (3) i (4) $\Rightarrow$ $x_1=x_2$ i $y_1=y_2$
\# kontradikcija
$(x_1 \neq x_2$ i $y_1 \neq y_2)$

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome I_2 vrijedi.

I_3 Za svaku pravu postoje bar dvije tačke koje su sa njom incidentne. Postoje bar tri tačke koje nisu incidentne sa istom pravom.

Posmatrajmo proizvoljnu pravu $ax+by+c=0$. Da li postoje dvije tačke na ovoj pravoj?
Da npr. tačke $(0,-\frac{c}{b})$ i $(-\frac{c}{a},0)$ su dvije tačke koje su incidentne sa datom pravom.

Da li postoje tri tačke koje nisu incidentne ni sa jednom pravom? Da. Posmatrajmo npr. tačke $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$.
Ako bi pokušali pronaći pravu $ax+by+c=0$ koja prolazi kroz ove tri tačke imali bi

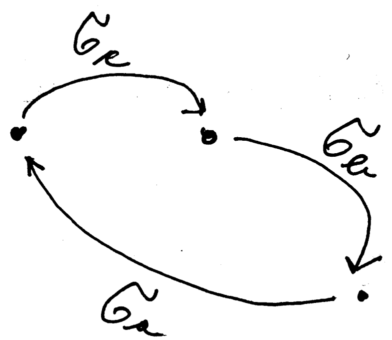
$$\begin{aligned} a\cdot 0+b\cdot 0+c&=0 \\ a\cdot 0+b\cdot 1+c&=0 \\ a\cdot 1+b\cdot 0+c&=0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow a=b=c=0$

Postoje bar tri tačke koje nisu incidentne sa istom pravom.

10) Dokazati da kompozicija tri osne simetrije ne može biti identitet.

Rj. $\left.\begin{array}{l}\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c \\ \text{su tri osne simetrije}\end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c \neq id$.



Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. da je $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = id$.

Znamo da je $\sigma_c \circ \sigma_c = \sigma_c^2 = id$

pa

$$\underline{\sigma_a \circ \sigma_b} \circ \sigma_c = \underline{\sigma_c} \circ \sigma_c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_c$$

Razmotrimo dva slučaja

1° $a \neq b$

Na osnovu prethodnog zadatka transform. $\sigma_a \circ \sigma_b$ ima tačno jednu fiksnu tačku $\{S\} = a \cap b$.

σ_c ima beskonačno mnogo fiksnih tačaka (sve tačke prave c)

kontradikcija (sa $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_c$)

2° $a = b$

$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_a \circ \sigma_a = id = \sigma_c \Rightarrow \sigma_c = id$

kontradikcija (osna simetrija nije identitet)

(#) Dokazati da je proizvod tri osne simetrije osna simetrija ako i samo ako sve tri ose pripadaju eliptičnom pramenu pravih.

Napomena: Eliptičan pramen pravih je skup svih pravih koje prolaze kroz istu tačku.

Rj.

„$\Leftarrow$": $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \Rightarrow a, b$ i c pripadaju eliptičnom pramenu pravih

— — $\underline{a, b}, c, d$ tri različite prave

Kako pokazati da tri prave pripadaju istom eliptičnom pramenu pravih?

Trebamo pokazati da se a, b i c sijeku u istoj tački.

Neka je $a \cap b = \{S\}$

$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \quad / \circ \sigma_c$ sa desne strane

$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_d \circ \sigma_c$

$\sigma_a \circ \sigma_b(S) = \sigma_d \circ \sigma_c(S) \quad \Rightarrow \quad \sigma_d \circ \sigma_c(S) = S$

Ako bi pretpostavili da je $\sigma_c(S) = S'$ $(S' \neq S)$ dobili bi da

$\sigma_d \circ \sigma_c(S) = \sigma_d(S') = S \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} c \text{ simetrala } SS' \\ d \text{ simetrala } SS' \end{array}\right\} \Rightarrow c \equiv d$

kontrad. (sa $c \not\equiv d$)

Prema tome ako je

$\sigma_d \circ \sigma_c(S) = S$ i

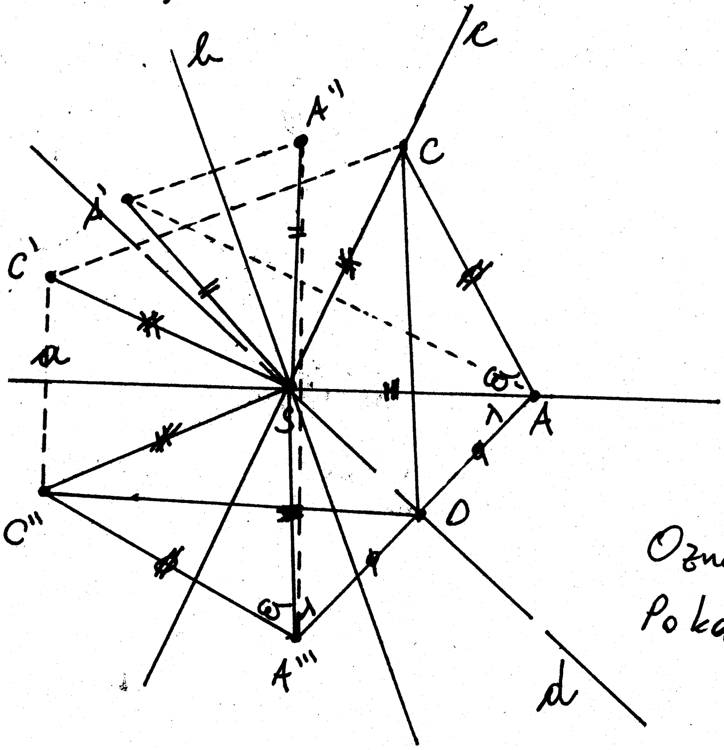
$\sigma_c(S) = S$ to znači da se c i d sijeku u tački S. (to je moguće samo u slučaju)

$\Rightarrow a \cap b \cap c = \{S\} \Rightarrow a, b$ i c pripadaju istom eliptičnom pramenu pravih

— — —

„$\Rightarrow$": a, b, c pripadaju eliptičnom pramenu $\Rightarrow \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ je osna simetrija.

Neka je $a \cap b \cap c = \{S\}$. Označimo sa $\rho = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$



a) posmatrajmo tačku S

$\rho(S) = S$

b) uzmimo proizvoljnu tačku $A \in a$, $A \neq S$. Neka je

$\sigma_c(A) = A'$, $\sigma_b(A') = A''$, $\sigma_a(A'') = A'''$

tj. $\rho(A) = A'''$

Označimo sa d simetralu duži AA''', Pokažimo da je $S \in d$.

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_c(A) = A' \Rightarrow SA \cong SA' \\ \sigma_b(A') = A'' \Rightarrow SA' \cong SA'' \\ \sigma_a(A'') = A''' \Rightarrow SA'' = SA''' \end{array}\right\} \Rightarrow SA \cong SA'''$$

$\Delta SA'''A$ je jkk sa osnovicom AA''' $\Rightarrow S \in d$

(d sadrži visinu)

c) Uzmimo proizvoljnu tačku $C \in c$, $C \neq S$. Neka je

$\sigma_c(C) = C$, $\sigma_b(C) = C'$, $\sigma_a(C') = C''$ tj. $\rho(C) = C''$.

Pokažimo da je d simetrala duži CC''.

Označimo sa $\{D\} = d \cap AA'''$.

Iz dijela b) smo dobili da je $AD \cong A'''D$ i $\measuredangle DAS \cong \measuredangle DA'''S = \lambda$

Podudarnost čuva dužine pa je $AC \cong \rho(A)\rho(C) = A'''C''$

Dalje imamo
$$\left.\begin{array}{l} CS \cong C''S \\ AC \cong A'''C'' \\ AS \cong A'''S \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \Delta A'''SC'' \cong \Delta ASC$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle C''A'''S \cong \measuredangle SAC = \omega$$

Posmatrajmo $\Delta C''A'''D$ i ΔACD. U njima su podudarni SUS pa su ta dva trougla podudarna $\Rightarrow CD \cong C''D \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta CC''D$ je jkk sa osnovicom CC'' $\Rightarrow d$ simetrala CC''

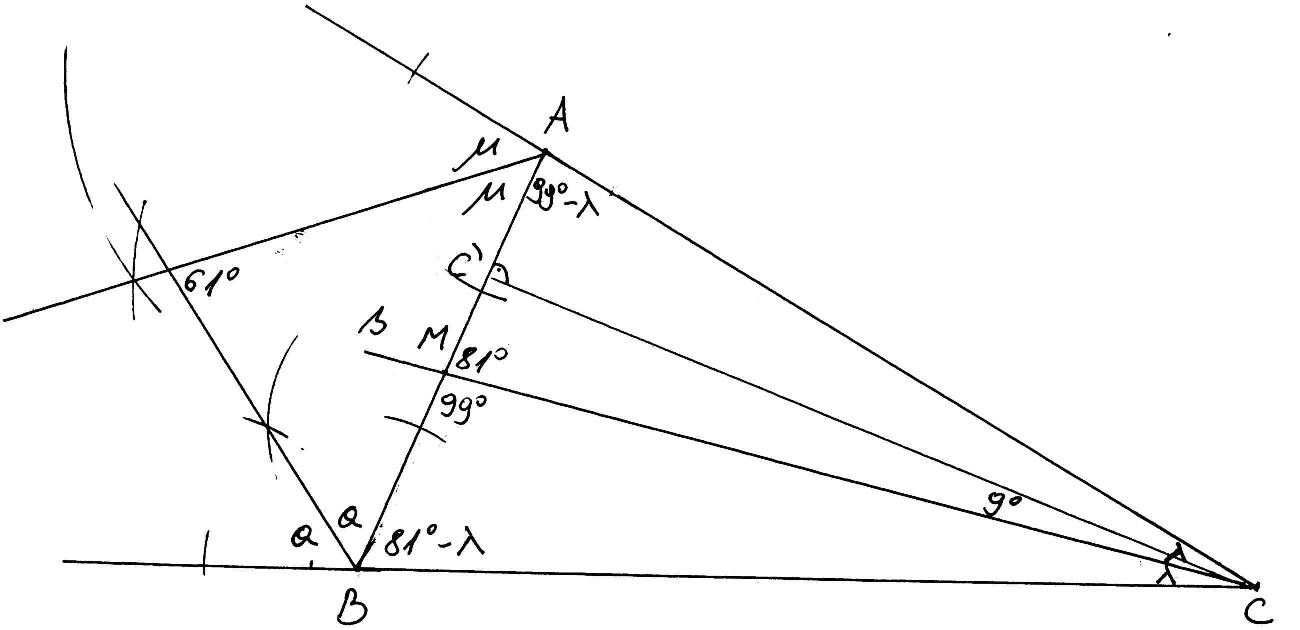
Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} \rho(S) = S \\ \rho(A) = A''' \\ \rho(C) = C'' \end{array}\right\} \text{ i } \left.\begin{array}{l} \sigma_d(S) = S \\ \sigma_d(A) = A''' \\ \sigma_d(C'') = C'' \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{nekolinearni}]{A,\,S,\,C} \sigma_d = \rho \text{ tj } \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d$$

q.e.d.

#) U oštrouglom trouglu ΔABC $(AC < BC)$ visina $h_c = CC'$ i simetrala $s = p(C, M)$ ugla γ zaklapaju ugao od 9°, a simetrale spoljašnjih uglova kod tjemena A i B sijeku se pod uglom od 61°. Odrediti uglove ΔABC.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

$\Delta CMC'$ pravougli $\Rightarrow$ $\measuredangle CMC' = 81^\circ$; $\measuredangle BMC = 99^\circ$

$\Rightarrow$ $\alpha = 99^\circ - \lambda$; $\beta = 81^\circ - \lambda$

$$\left.\begin{array}{l} 2\mu + 99^\circ - \lambda = 180^\circ \Rightarrow 2\mu = 81^\circ + \lambda \\ 2\theta + 81^\circ - \lambda = 180^\circ \Rightarrow 2\theta = 99^\circ + \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2\mu + 2\theta = 180^\circ + 2\lambda \quad \ldots (*)$$

$\theta + \mu + 61^\circ = 180^\circ \quad / \cdot 2$

$2\theta + 2\mu + 122^\circ = 360^\circ$

$2\theta + 2\mu = 238^\circ \quad \ldots (**)$

$(*)$; $(**)$ $\Rightarrow$

$180^\circ + 2\lambda = 238^\circ$

$2\lambda = 58^\circ$

$\lambda = 29^\circ$

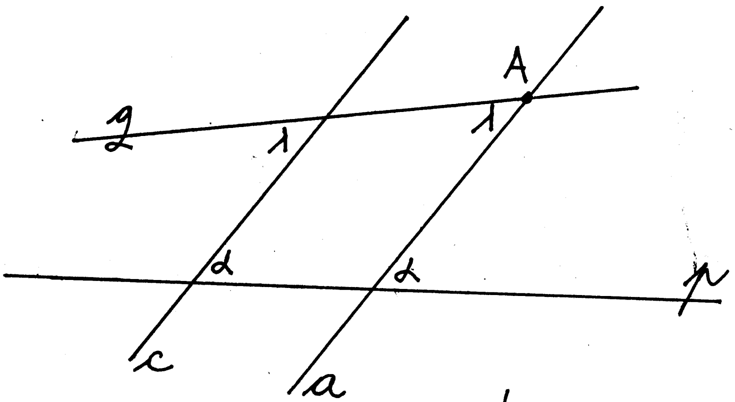
$\Rightarrow$ $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 52^\circ$; $\gamma = 58^\circ$

2. Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku (van date prave) i siječe datu pravu pod datim uglom.

Rj.:

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je a tražena prava koja sadrži tačku $A \in p$, i siječe pravu p pod uglom α.

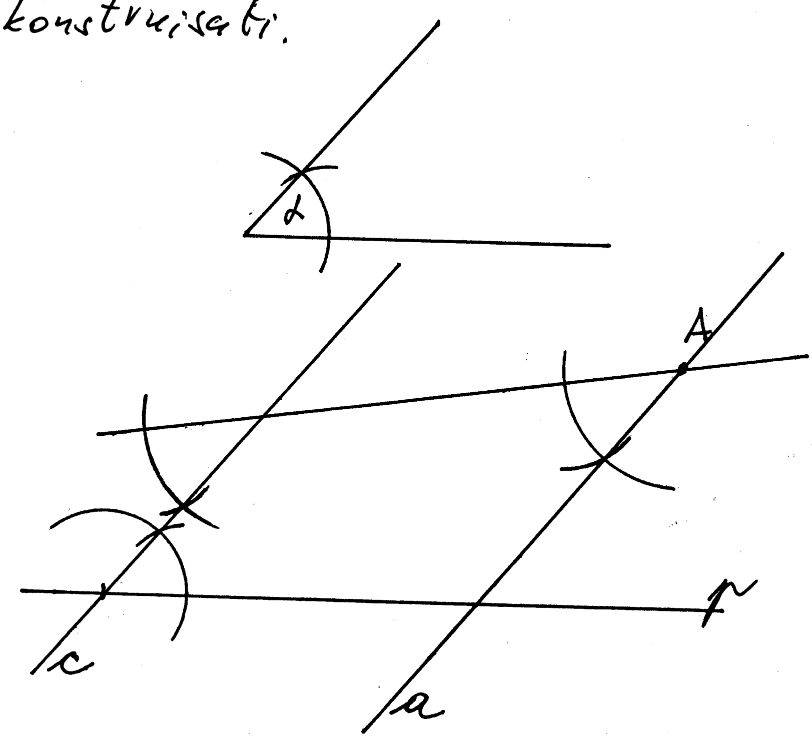


Neka je c proizvoljna prava koja siječe pravu p pod uglom α. Primjetimo da je $a \parallel c$.

Ako sa g označimo proizvoljnu pravu koja siječe prave a i c i koja sadrži tačku A, dobićemo jednake uglove λ na transferzali, pa pravu a sad nije teško konstruisati.

Konstrukcija

1. p, $A \notin p$, α
2. proizvoljnu pravu c takvu da siječe pravu p pod uglom α
3. proizvoljnu pravu g takvu da siječe prav da sadrži tačku A.
4. pravu a: $A \in a$ i $a \parallel c$



Dokaz

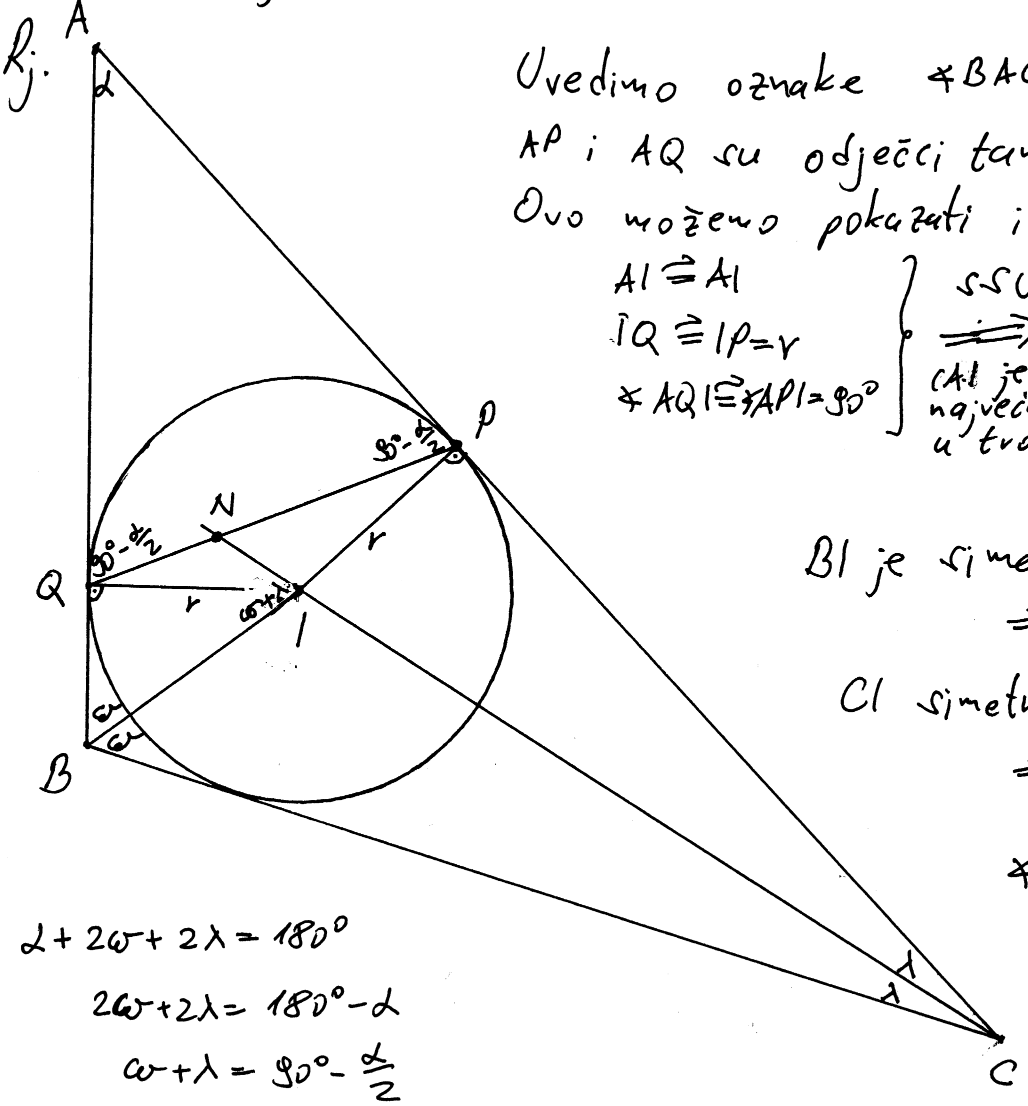
Da dobijena prava prolazi kroz datu tačku i da siječe datu pravu pod datim uglom slijedi iz konstrukcije i osobina podudarnosti uglova na transferzali

Diskusija

Jedinstvenost rješenja slijedi iz 5 Euklidovog aksioma.

(#) Krug k upisan u tupougli trougao ΔABC (ugao kod vrha $\sphericalangle ABC$ je tup) ima centar u tački I i dodiruje stranice AC i AB redom u tačkama P i Q. Prava $p(C, I)$ siječe duž PQ u tački N. Dokazati da se oko četverougao $\square BINQ$ može opisati krug.

Rj.



Uvedimo oznake $\sphericalangle BAC=\alpha$, $\sphericalangle ABC=2\omega$, $\sphericalangle ACB=2\lambda$.

AP i AQ su odječci tangenti pa je $AQ\cong AP$.

Ovo možemo pokazati i na drugi način:

$$\left.\begin{array}{l} AI\cong AI \\ IQ\cong IP=r \\ \sphericalangle AQI\cong\sphericalangle API=90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{SSU} \Delta AQI\cong\Delta API \Rightarrow AQ\cong AP$$

(AI je najveća str. u trouglu)

BI je simetrala ugla $\sphericalangle CBA$

$\Rightarrow \sphericalangle CBI\cong\sphericalangle ABI=\omega$

CI simetrala $\sphericalangle ACB \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle PCI\cong\sphericalangle ICB=\lambda$

$\sphericalangle NIB$ je vanjski ugao $\Delta BCI \Rightarrow$

$\sphericalangle NIB=\lambda+\omega$

$\alpha+2\omega+2\lambda=180^\circ$

$2\omega+2\lambda=180^\circ-\alpha$

$\omega+\lambda=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$

$\sphericalangle NIB=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$

$\sphericalangle AQP$ jkk $\Rightarrow \sphericalangle AQP\cong\sphericalangle APQ=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$

$\sphericalangle AQP+\sphericalangle PQB=180^\circ \Rightarrow \sphericalangle PQB=90^\circ+\frac{\alpha}{2}=\sphericalangle NQB$

Sad u $\square BINQ$ imamo

$\sphericalangle BQN+\sphericalangle BIN=90^\circ+\frac{\alpha}{2}+\omega+\lambda=90^\circ+\frac{\alpha}{2}+90^\circ-\frac{\alpha}{2}=180^\circ$

Četverougao $\square BINQ$ je tetivni,

q.e.d.